№ 3, 2001 г. / Школа в “Кванте” - Физика 9-11

А. Черноуцан

Кинематика точного курса

К. Блиох

Печаль или радость

В. Ланге

Эффективное напряжение в сети переменного тока

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Кинематика точного курса» предназначена девятиклассникам, заметка «Печаль или радость» – десятиклассникам и «Эффективное напряжение в сети переменного тока» – одиннадцатиклассникам.

Кинематика точного курса

А.ЧЕРНОУЦАН

Что общего в поведении капитана корабля, плывущего через океанские просторы, командира самолета, совершающего дальний перелет, или лодочника, пересекающего быструю реку на небольшой моторной лодке? Каждый из них должен решать сложнейшую навигационную задачу – выбрать оптимальный курс в условиях перемещения относительно движущейся среды (т.е. с учетом океанских и речных течений и переменчивых ветров).

Представьте себя для начала капитаном, приступающим к корректировке курса своего корабля. Конечно, первая (и весьма трудная!) задача – точно определить свои координаты в отсутствие каких-либо зрительных ориентиров. До изобретения радио и появления радиомаяков мореплавателям приходилось иногда дни и недели ждать, когда, наконец, откроется небо и можно будет с помощью Солнца и звезд узнать, куда тебя занесли ветры и течения, и весьма приближенно нанести на карту свое местоположение. В наше время эта проблема существенно упростилась, и будем предполагать, что мы с ней успешно справились.

Что дальше? Обозначив на карте положение корабля, выбираем направление дальнейшего движения (в простейшем случае – точно на порт назначения, если только не надо обогнуть Бермудский треугольник или группу гигантских айсбергов). Казалось бы, осталось только отдать приказ – взять курс в этом направлении. Но нет, необходимо сначала посмотреть на карту океанских течений и, если надо, сделать соответствующую поправку. Скорость океанских и морских течений может быть не столь уж мала; к примеру, скорость знаменитого Гольфстрима достигает 10 км/ч. Как же сделать поправку на течение и определить точный курс?

Когда капитан указывает курс, рулевой поворотами руля устанавливает в этом направлении корпус корабля. (Более точно – в указанном направлении устанавливается горизонтальная ось корабля, т.е. линия, проведенная от середины кормы к носу.) Если бы не было течения, волн и ветра, то именно в этом направлении двигался бы корабль, причем со скоростью, соответствующей его ходовым характеристикам. Для каждого корабля существует индивидуальная зависимость его скорости в спокойной неподвижной воде от режима работы двигателя (от числа оборотов). Если же есть заметное течение, то скорость корабля оказывается иной как по величине, так и по направлению – корабль, как говорят, сносит течением.

Предположим для простоты, что ветер и волны отсутствуют, и перейдем в систему отсчета, связанную с движущейся водой, т.е. двигающуюся со скоростью течения. В этой системе вода неподвижна, а корабль движется точно вдоль своей оси с расчетной скоростью. Значит, именно этой относительной скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ управляет капитан корабля, задавая курс и число оборотов двигателя. Скорость же корабля относительно берега $\vec{v}$ определяется законом сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{в}}, \qquad (1)$$

где $\vec{v}_{\text{в}}$ – скорость воды (скорость течения).

Это векторное равенство означает, что указанные три скорости образуют треугольник (рис.1). После определения (по карте) направления на порт

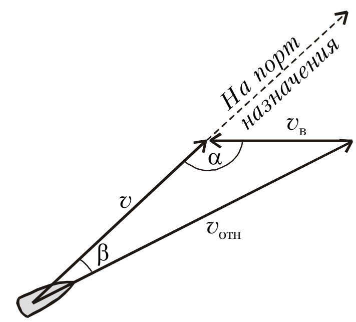

Рис. 1

назначения, т.е. направления скорости $\vec{v}$, и направления и величины скорости течения $\vec{v}_{\text{в}}$ нам известны в этом треугольнике угол α и сторона $v_{\text{в}}$. Если капитан решает не менять число оборотов двигателя, то $v_{\text{отн}}$ тоже известна. Нам надо определить угол β – его называют углом сноса. Спроектировав равенство (1) на направление, перпендикулярное вектору $\vec{v}$, получим

$$0 = v_{\text{отн}} \sin\beta - v_{\text{в}} \sin\alpha, \qquad (2)$$

откуда и находим угол β. Например, если скорость хода 30 км/ч, а скорость течения равна 4 км/ч и составляет с направлением движения угол 120°, то угол сноса составит приблизительно 6,5°.

Чтобы узнать, с какой скоростью v мы приближаемся к цели, спроектируем равенство (1) на направление вектора $\vec{v}$ и найдем

$$v = v_{\text{отн}} \cos\beta + v_{\text{в}} \cos\alpha. \qquad (3)$$

Подставляя численные данные для разобранного примера, получим, что скорость v равна примерно 27,8 км/ч.

Впрочем, можно поставить задачу немного иначе. Если задаться целью прибыть в порт назначения точно в срок, то надо поддерживать скорость движения v постоянной. Необходимую для этого $v_{\text{отн}}$ можно найти из теоремы косинусов:

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v^2 + v_{\text{в}}^2 - 2vv_{\text{в}} \cos\alpha}, \qquad (4)$$

после чего можно по формуле (2) определить угол сноса β. Так, в нашем примере для поддержания скорости корабля 30 км/ч надо увеличить число оборотов так, чтобы относительная скорость равнялась 32,2 км/ч, а угол сноса сделать равным примерно 6,2°.

Отметим, что кроме течения есть и другие факторы, влияющие на направление и величину скорости корабля. Это, в первую очередь, сильный ветер, создающий дополнительное боковое давление на борт (можно сказать, что корабль движется не в одной подвижной среде, а в двух – водной и воздушной). При ветре направление движения корабля относительно воды может немного отличаться от направления его оси. Кроме того, дополнительное отклонение возникает за счет регулярных ударов волн, если они приходятся на один из бортов. Учесть эти факторы можно только приблизительно, и поэтому надо периодически замерять координаты корабля и производить корректировку курса.

Теперь давайте пересядем на самолет, совершающий многочасовой перелет, и попробуем учесть влияние ветра. Проблемы для воздушного лайнера во многом такие же, как для океанского. Видимые ориентиры на поверхности часто скрыты облаками, а при высоких скоростях даже небольшие ошибки в выборе курса могут быстро привести к заметным отклонениям. Конечно, летчикам не приходилось совершать дальние перелеты в эпоху до изобретения радио, но несколько десятков лет назад, до появления систем глобальной радиолокации и спутниковой связи, проблема ориентации стояла весьма остро (вспомните, например, Экзюпери). В наши дни задачу выбора курса решает не только летчик, но и находящийся с ним в постоянном контакте наземный диспетчер, который по радиолокационным данным может отслеживать положение самолета и вычислять направление и величину его скорости (относительно земли). Вдали от аэропорта, вне связи с диспетчером, летчик следит за тем, чтобы не выйти за пределы выделенного ему воздушного коридора с помощью радиомаяков, доступных ему в течение перелета.

В отличие от корабля, взаимодействующего не только с водной средой, но и с воздушной, самолет испытывает отклоняющее влияние только одной движущейся среды – воздушной. В системе отсчета, связанной с воздухом (т.е. движущейся со скоростью ветра), скорость самолета $\vec{v}_{\text{отн}}$ направлена вдоль его оси. Его скорость относительно земли $\vec{v}$ можно найти с помощью формулы (1), только $\vec{v}_{\text{в}}$ обозначает теперь не скорость воды, а скорость воздуха (ветра). Хотя скорость самолета в десятки раз больше, чем скорость корабля, но и скорость ветра может быть значительно больше скорости течения. При взлете и посадке скорость самолета составляет 220–280 км/ч, т.е. 60–80 м/с, а скорость бокового ветра может достигать 15–20 м/с (при более сильном ветре посадка запрещена). На высоте 8–10 км, где проходит бóльшая часть полета, самолет летит со скоростью 600–900 км/ч (на этой высоте плотность воздуха, а значит, и лобовое сопротивление в два с лишним раза меньше), однако и ветры, регулярно дующие на этих высотах (их называют струйными), могут иметь скорость до 40–50 м/с.

Главная трудность в расчете полетного задания состоит в том, что, в отличие от морских течений, невозможно создать устойчивую карту струйных ветров, поскольку день ото дня их скорость меняется и по величине, и по направлению. Примерная схема корректировки курса выглядит следующим образом. После набора нужной высоты диспетчер задает кораблю курс (т.е. направление и величину $\vec{v}_{\text{отн}}$), исходя из предполагаемой скорости ветра (определенной при пролете по этому коридору предыдущего самолета). После этого он определяет по данным радиолокации направление и величину скорости самолета относительно земли $\vec{v}$. Если она заметно отличается от ожидаемой, то необходимо внести поправку на изменение скорости ветра. Зная $\vec{v}_{\text{отн}}$ и $\vec{v}$, можно с помощью формулы (1) определить новую скорость ветра $\vec{v}_{\text{в}}$ (подумайте, как это сделать) и произвести необходимую корректировку.

Особое значение боковой ветер играет при взлете и посадке. Рассмотрим, какие трудности могут возникать во время посадки, проходящей при сильном боковом ветре. С момента, когда колеса шасси коснулись земли, самолет начинает взаимодействовать не только с воздухом, но и с твердой поверхностью. При качении по полосе всеми колесами – передними и задними – самолет должен быть ориентирован вдоль линии движения, т.е. вдоль посадочной полосы (иначе возникает опасность поломки шасси или разворота корпуса самолета). Однако при приближении к полосе у самолета может быть значительный угол сноса, т.е. его корпус может быть заметно повернут по отношению к полосе. Как рассказывают летчики, при посадке на легком самолете (со сравнительно небольшой посадочной скоростью) самолет бывает повернут так, что стойка окна мешает видеть всю полосу. Выход состоит в том, что надо садиться сначала на задние колеса, после чего действующая на них сила трения быстро выравнивает корпус самолета, и можно начинать качение на полном шасси.

Теперь нам осталось только пересечь быструю речку на небольшой моторной лодке. Многое из сказанного относится и к этому случаю, но здесь может возникнуть ситуация, с которой мы раньше не встречались. Если скорость течения реки $v_{\text{в}}$ больше, чем скорость нашей лодки относительно воды $v_{\text{отн}}$, то совсем не все направления движения нам доступны. В частности, мы при всем желании не сможем пересечь речку и оказаться точно напротив точки отплытия. Однако мы можем постараться сделать так, чтобы нас снесло течением как можно меньше. Для этого надо, чтобы угол φ между направлением скорости $\vec{v}$ и перпендикуляром к линии берега был как можно меньше. «Изобразим» на рисунке 2 формулу (1) и посмотрим, как будет меняться направление скорости $\vec{v}$ при различных направлениях скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$ (т.е. в зависимости от ориентации корпуса лодки). Видно, что конец вектора $\vec{v}_{\text{отн}}$ описывает окружность, и самый маленький угол $\varphi = \arccos\left(v_{\text{отн}}/v_{\text{в}}\right)$ достигается в том случае, когда вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к этой окружности. Для этого надо направить корпус лодки против течения под углом φ к линии берега. Интересно, что в этом случае лодка будет плыть в направлении, перпендикулярном линии корпуса.

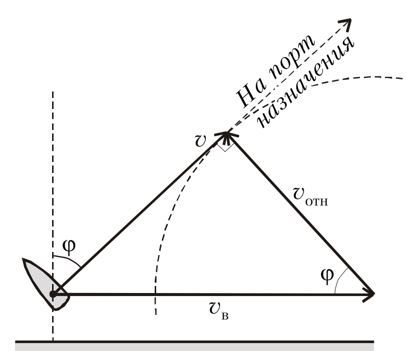

Рис. 2

Чтобы проверить, насколько вы освоились с проблемой выбора курса и с законом сложения скоростей, попробуйте самостоятельно решить две такие задачи:

1. В безветренную погоду самолет затрачивает на перелет между городами 6 часов. На сколько минут увеличится время полета, если будет дуть

боковой ветер со скоростью 20 м/с перпендикулярно линии полета? Скорость самолета относительно воздуха 328 км/ч. (Ответ: на 9 мин.)

2. При переправе через речку шириной 80 м надо попасть в точку, лежащую на 60 м выше по течению, чем точка старта. Лодочник управляет моторной лодкой так, что она движется точно к цели со скоростью 4,5 м/с относительно берега. Какова при этом скорость лодки относительно воды, если скорость течения 2,1 м/с? (Ответ: 6 м/с.)

Печаль или радость

К.БЛИОХ

Если можно о чем скорбеть,
Значит, можно чему улыбаться.
С.Есенин

Что свойственно человеку: грустить или радоваться, скорбеть или улыбаться, быть оптимистом или пессимистом? Этот философский вопрос на протяжении многих веков обсуждали лучшие умы человечества и, естественно, давали разные ответы. И, как всегда в таких «глубоких» вопросах, каждый был по-своему прав. Я не знаю, на какую чашу весов выпало большее число ответов, но мне почему-то кажется, что на чашу радости.

Попробуем ответишь на поставленный вопрос, опираясь только на элементарную физическую основу явлений, на известные нам экспериментальные данные и на... музыку. Воспользуемся тем, что практически все люди, слушая музыку, испытывают похожие (конечно, в грубом приближении) эмоциональные переживания. В основе этого лежит музыкальный мажоро-минорный дуализм. Согласно классической теории музыки, музыкальные лады делятся на мажорные и минорные. При этом мажорные лады воспринимаются человеком как носители бодрой, радостной, светлой окраски, а минорные – унылой, печальной, сумрачной. Чем же отличаются мажорные и минорные лады с физической точки зрения?

Ноты. Музыкальные звуки записываются, в большинстве своем, нотами. Нота определяет высоту звучания данного звука, т.е. физически – основную частоту колебаний в его спектре. Шкала нот соответствует логарифму частотной шкалы. Музыкальный интервал между нотами, частота которых отличается в 2 раза, всегда равен октаве. Чтобы получить все ноты в пределах одной октавы, нужно октаву разделить на 12 равных музыкальных интервалов – полутонов. Итак, если исходная нота (положим, *до*) имеет основную частоту ω_0, то основные частоты остальных нот определяются по формуле

$$\log_2 \omega_n = \log_2 \omega_0 + n\frac{\log_2 2\omega_0 - \log_2 \omega_0}{12} = \log_2 \omega_0 + \frac{n}{12},$$

или

$$\omega_n = \omega_0 \cdot 2^{n/12},$$

где n – целое число. При $n = 0$ формула определяет основную частоту исходной ноты, при $n = 1$ – ноты на полтона выше, при $n = -1$ – ноты на полтона ниже и т.д. При $n = \pm 12$ мы получаем основные частоты нот на октаву выше и ниже исходной.

Музыкальная шкала звуков имеет циклическую структуру. Ноты, отличающиеся на октаву друг от друга, в определенном смысле тождественны друг другу. А именно, добавление к данному созвучию (аккорду) ноты, звучащей на октаву выше уже имеющейся в нем ноты, не изменяет его эмоциональную окраску, а затрагивает только тембральную сторону его звучания. (Это связано с тем, что в спектре каждого звука присутствует, кроме основной его частоты, частота звука на октаву выше и все его обертоны – см. Дополнение). Поэтому ноты получили собственные названия только в пределах одной октавы, дальше они циклически повторяются с добавлением только номера октавы, в которой они расположены.

В таблице 1 приведены названия нот, соответствующие им числа n, величина и название музыкальных интервалов, которые они составляют с исходной нотой. Пунктирные линии разделяют ноты разных октав. Знаки «плюс» и «минус» перед названием и величиной интервала означают, что интервал откладывается, соответственно, вверх и вниз от начальной ноты. При сложении интервалов конечная нота первого интервала является начальной для второго.

Мажор и минор. Теперь мы можем определить понятия мажорного и минорного ладов. Мажорным (минорным) ладом называется лад, опорные звуки которого образуют мажорное (минорное) трезвучие. Мажорное (минорное) трезвучие состоит из трех звуков: первого – основного, второго – на большую (малую) терцию выше основного, третьего – на квинту выше основного. Таким образом, разница между мажором и минором заключается в положении среднего звука (терции) соответствующего трезвучия. Согласно таблице 1, до-мажорное и до-минорное трезвучия составляют ноты

до – ми – соль ($n = 0, 4, 7$)

и

до – ми-бемоль – соль ($n = 0, 3, 7$).

Поистине удивительно, что минимальное отличие в положении одной ноты определяет две основополагающие противоположности: мажор и минор, радость и печаль в нашем настроении!

Любопытно, что мажорное и минорное трезвучия являются обратными друг другу не только в эмоциональном, но и в математическом смысле. Действительно, мажорное трезвучие состоит из последовательно отложенных большой, а затем малой терции (4 + 3; рис.1,*а*). Минорное трезвучие состоит из этих же интервалов, но в обратном порядке: малая терция, затем большая (3 + 4; рис.1,*б*). Если мы зеркально отразим ноты трезвучия относительно произвольной точки нотной шкалы, то интервалы будут следовать в обратном порядке: мажорное трезвучие переходит в минорное и наоборот. А вспомнив, что нотная шкала соответствует логариф-

Таблица 1

n	Название ноты	Величина музыкального интервала	Название музыкального интервала
...	...	...	...
−2	ля-диез (си-бемоль)	−1 тон	−октава+малая септима (−большая секунда)
−1	си	−0,5 тона	−октава+большая септима (−малая секунда)
0	до	0 тонов	прима (унисон)
1	до-диез (ре-бемоль)	0,5 тона	малая секунда
2	ре	1 тон	большая секунда
3	ре-диез (ми-бемоль)	1,5 тона	малая терция
4	ми	2 тона	большая терция
5	фа	2,5 тона	кварта
6	фа-диез (соль-бемоль)	3 тона	тритон
7	соль	3,5 тона	квинта
8	соль-диез (ля-бемоль)	4 тона	малая секста
9	ля	4,5 тона	большая секста
10	ля-диез (си-бемоль)	5 тонов	малая септима
11	си	5,5 тонов	большая септима
12	до	6 тонов	октава
13	до-диез (ре-бемоль)	6,5 тонов	октава+малая секунда (малая нона)
...	...	...	...

му частотной шкалы, мы получим следующий факт: если три звука с частотами a, b, c образуют мажорное (минорное) трезвучие, то звуки с частотами a^{-1}, b^{-1}, c^{-1} будут образовывать минорное (мажорное) трезвучие.

Обертоны звуков. Каждый природный звук представим в виде суммы бесконечного числа гармоник – синусоидальных колебаний определенной частоты и амплитуды. Чем больше амплитуда, тем более существенна данная гармоника в общем звучании.

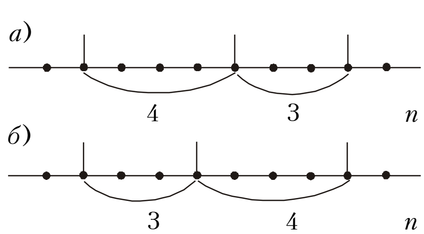

Рис.1. Мажорное (а) и минорное (б) трезвучия на нотной шкале n. При инверсии (отражении) оси n мажор и минор переходят друг в друга

Наибольшую амплитуду имеет гармоника основной частоты – основной тон. Следующие за ней (по убыванию амплитуды) гармоники называются обертонами. Частоты обертонов находятся, как правило, в одних и тех же соотношениях с частотой основного тона для любого природного звука. Связано это вот с чем.

Все звуки, которые мы слышим в природе, рождаются н усиливаются колебаниями различных физических тел. В основе этого лежит явление резонанса. Пусть тело, издающее в результате какого-то внешнего воздействия звук, имеет характерный линейный размер L. Тогда, как известно из физики колебаний, в первую очередь возбуждаются волны, для которых выполнено условие резонанса

$$L = m\frac{\lambda}{2},$$

где λ – длина звуковой волны, а m – любое натуральное число. Это условие требует, чтобы внутри тела укладыва-

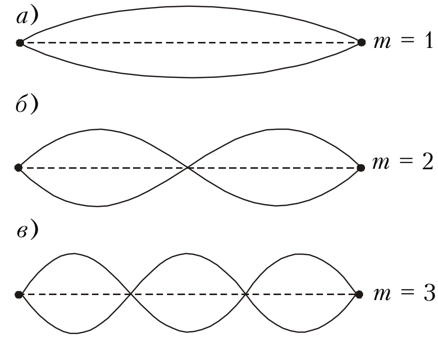

Рис. 2. Колебания струны, отвечающие: а) основному тону, б) первому обертону, в) второму обертону

лось целое число полуволн. Например, в колеблющейся струне действительно должно укладываться целое число полуволн, так как ее концы закреплены жестко и должны приходиться на узловые точки соответствующих синусоид (рис. 2). Поскольку длина звуковой волны однозначно связана с ее частотой:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

где c – скорость звука, то условие резонанса можно записать в виде

$$\omega = m\frac{\pi c}{L}.$$

При $m = 1$ эта формула описывает частоту основного тона звука:

$$\omega_0 = \frac{\pi c}{L},$$

при $m > 1$ – частоты его обертонов. Число $m - 1$ является номером обертона. Чем выше обертон, тем слабее он возбуждается.

Музыка природы. Определим теперь, каким нотам соответствуют природные обертоны звука. Выразим частоты обертонов через частоту основного тона:

$$\omega_{m-1} = m\omega_0$$

и воспользуемся формулой для основных частот нот октавы:

$$\omega_n = \omega_0 \cdot 2^{n/12}.$$

Приравняем правые части этих выражений, решим получившееся равенство относительно n и узнаем, каким нотам соответствуют обертоны звука:

$$n = 12\log_2 m,$$

где n – уже нецелое число, поскольку, обертоны не в точности соответствуют определенным нотам. В таблице 2 приведены вычисленные приближенные значения n для первых четырех обер-

Таблица 2

m	n	Название ноты	Музыкальный интервал относительно основного тона
1	0	до	прима
2	12	до	октава
3	19,02	соль	октава + квинта
4	24	до	две октавы
5	27,9	ми	две октавы + большая терция

тонов и соответствующие им ноты, определенные по таблице 1.

Мы видим, что первые четыре обертона приближенно соответствуют нотам *до*, *ми*, *соль*, составляющим аккорд мажорного трезвучия. (Напомним, что отличие в нотах на октаву не играет роли при определении эмоционального характера аккорда.) Более того, в первых пятнадцати обертонах ноты *до*, учитываемых в музыкальной акустике, нет ноты *ми-бемоль*, которая соответствует минорному трезвучию. Заметим также, что ноты не в точности соответствуют природным обертонам звуков – мы получили нецелые значения n. Это показывает приближенность введенного европейской цивилизацией нотного строя. (Эта приближенность называется темперацией, и она необходима, чтобы построить столь удобную циклическую нотную систему (см. Дополнение).) Тем не менее, с хорошей точностью (которая удовлетворяет слушателей уже четыре столетия) можно утверждать, что в любом природном звуке, будь то звон капли дождя, скрип дерева, птичий свист или звучание музыкального инструмента, мы всегда слышим мажорный аккорд.

Итак, каждый человек (в том числе и тот, который не знает ни нотной грамоты, ни физических основ акустики) однозначно воспринимает мажорную музыку как носителя разнообразных эмоций радости, а минорную – как носителя печальных эмоций. Иными словами, человек инстинктивно или подсознательно воспринимает свойственную природе музыку как радостную и несвойственную – как печальную. А если учесть, что человек также есть часть природы, то можно предположить, что эмоции радости более свойственны человеку, нежели эмоции печали.

В заключение отметим, что приведенные рассуждения следует воспринимать лишь как любопытный факт, демонстрирующий тесную взаимосвязь (даже на элементарном уровне) физических, культурных и духовных сфер бытия. Однако отсюда не следует делать каких-либо однозначных практических выводов. Во-первых, потому что природа устроена гораздо сложнее и богаче, а во-вторых, потому что в других сферах законы физики могут и не действовать – как известно, всякий закон имеет свою область применимости.

Дополнение. Как строится нотная система

До сих пор мы говорили о существующем нотном строе и природных обертонах звуков как о независимых явлениях. На самом деле взаимосвязь между ними не случайна, и первичными являются обертоны звуков (они существовали в природе задолго до появления человека). Представления же о музыке как об определенных гармонично звучащих созвучиях появились именно из-за взаимодействия обертонов разных звуков.

Нота первого обертона. Октава. Чтобы ввести нотную шкалу, нужна какая-то условная точка отсчета. Пусть ею будет нота с основной частотой ω_0, частоты обертонов которой описываются формулой

$$\omega_{m-1} = m\omega_0 .$$

Рассмотрим теперь ноту, построенную на первом обертоне исходной ноты: $\omega_1 = 2\omega_0$. Частоты ее обертонов будут вычисляться по формуле

$$\omega_{m-1} = m\omega_1 = 2m\omega_0 .$$

Видно, что основной тон и все обертоны ноты первого обертона содержатся в обертонах исходной ноты: $(m-1)$-й обертон первой является $(2(m-1))$-м обертоном второй (рис.3,*а* и *б*). Это определяет гармонию в созвучии таких нот и объясняет то, что мы воспринимаем их как эмоционально эквивалентные. Таким образом мы приходим к октаве, главному естественно введенному нотному интервалу.

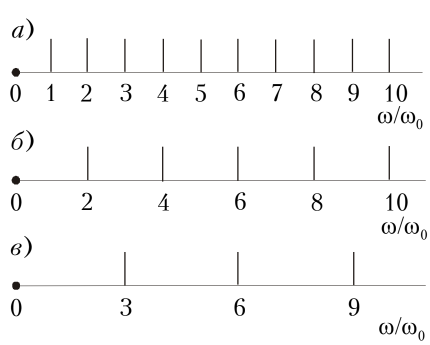

Рис.3. Частоты, соответствующие основному тону и обертонам: а) исходной ноты, б) ноты первого обертона, в) ноты второго обертона

Далее мы будем исходить из эквивалентности нот, частоты которых отличаются в 2 раза. Поэтому нотная последовательность будет обладать определенной цикличностью – достаточно определить все ноты в интервале частот $[\omega_0, 2\omega_0)$, а потом повторить подобным образом в интервалах $[2\omega_0, 4\omega_0)$, $[4\omega_0, 8\omega_0)$ и т.д. Для этого удобно изображать частоты нот в виде точек на окружности, согласно формуле

$$\alpha = 2\pi \log_2 \frac{\omega}{\omega_0} ,$$

где α – угловая координата, соответствующая данной частоте ω и откладываемая по часовой стрелке от нулевого значения, связанного с исходной частотой ω_0. Из формулы видно, что увеличение частоты в 2 раза соответствует прибавлению угла 2π и оставляет точку на прежнем месте. При таком подходе октава эквивалентна нулевому элементу множества интервалов – приме, и ее недостаточно для построения нетривиальной нотной системы.

Нота второго обертона. Квинта. Чтобы получить нетривиальный интервал, рассмотрим ноту, построенную на втором обертоне исходной ноты: $\omega_2 = 3\omega_0$. Все ее обертоны $\omega_{m-1} = m\omega_2 = 3m\omega_0$ также содержатся в обертонах исходной ноты, но расположены они более редко и соответствуют более слабым (высоким) обертонам исходной ноты по сравнению с нотой первого обертона (см. рис.3,*а* и *в*). А главное, что среди обертонов ноты второго обертона есть такие, которые не содержатся в обертонах ноты первого обертона (см. рис.3, *б* и *в*). Поэтому можно считать, что мы имеем дело с новой, вполне самостоятельной нотой. Интервал между нотами первого н второго обертонов есть квинта. Квинте соответствует угловой интервал

$$\alpha_q = 2\pi \log_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2\pi(\log_2 3 - 1) \approx 2\pi \cdot 0{,}585 ,$$

откладываемый от точки исходной ноты на окружности. (Мы учли эквивалентность положения на окружности исходной ноты и ноты первого обертона.)

Построение нотной системы на квинтах. С помощью квинты уже можно построить всю нотную систему. Действительно, введенная нами начальная нота условна, нотная система не должна зависеть от ее выбора. Построив одну квинту относительно исходной ноты, мы должны отложить квинту и от полученной ноты и от всех последующих, потому что любая из них может быть выбрана в качестве начальной (рис.4,*а*). Так будет продолжаться до тех пор, пока очередная из откладываемых последовательно квинт не попадет в начальную точку и процесс замкнется. Сколько же квинт (сколько точек и различных нот на окружности) мы отложим, пока не вернемся в исходную точку (т.е. совершим целое число оборотов)? Запишем для этого условие возвращения k-й квинты в начальную точку после l оборотов:

$$k\alpha_q = 2\pi l,$$

или

$$\frac{k+l}{k} = \log_2 3.$$

Но $\log_2 3$ – иррациональное число, которое не может быть представлено в виде отношения двух целых чисел. Поэтому желаемое равенство никогда не будет достигнуто, и бесконечное число точек последовательно откладываемых нами квинт заполнит в конце концов всю окружность (см. рис.4,*а*). Значит, нужно вводить бесконечное число нот либо жертвовать цикличностью или симметрией нашей нотной системы?

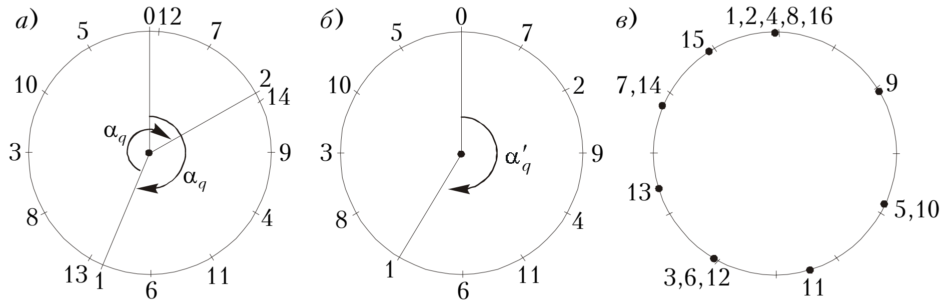

Рис.4. а) Последовательно откладываемые на окружности «чистые» квинты. Нулевая точка соответствует исходной ноте. б) Последовательно отложенные «исправленные» квинты. Двенадцатая точка попадает в начальную, и круг замыкается. в) Основной тон и первые 15 обертонов исходной ноты (точки) на фоне построенной нотной системы (черточки). Точкам, возле которых написано несколько чисел через запятую, отвечают все соответствующие обертоны

Темперация. Выход из этого сложного положения оказался удивительно простым, но человечеству понадобилось более 20 веков, пока в середине XVII века он не был найден органистом Андреем Веркмейстером. (Заметим, что до него этой задачей занимались такие ученые, как Кеплер и Эйлер.) Он предложил следующее решение: раз на целом числе окружностей не укладывается целое число квинт, значит, нужно подправить квинту так, чтобы укладывалось. Оказывается, что двенадцать квинт примерно равны семи октавам, и, отложив двенадцать точек, мы совершаем примерно семь оборотов по окружности и почти попадаем в исходную точку (см. рис.4,*а*). Изменим величину квинты так, чтобы это попадание было точным. Тогда исправленная квинта будет соответствовать углу

$$\alpha'_q = 2\pi \cdot \frac{7}{12} \approx 2\pi \cdot 0{,}583.$$

Двенадцать последовательно отложенных квинт точно разбивают окружность на 12 равных частей (см. рис.4,*б*). Полученные точки соответствуют нотам таблицы 1, а угловой интервал $\pi/6$ между соседними точками соответствует минимальному музыкальному интервалу (полтона). Замена натуральных природных квинт искусственными и введение соответствующего приближенного строя называется темперацией (от латинского temperatio – соразмерность).

Остальные обертоны. Следующие, более высокие, обертоны звука довольно хорошо укладываются в нотную систему, построенную нами только на первых двух обертонах. Рисунок 4,*в* показывает положение основного тона и первых его пятнадцати обертонов на фоне введенной нотной системы. Видно, что большинство обертонов с хорошей точностью соответствуют определенным нотам. Благодаря этому, предложенный нотный строй кажется нам естественным и гармоничным в звучании. С помощью рисунка 4,*в* можно также объяснить, почему одни музыкальные интервалы: прима, малая и большая терции, малая и большая сексты и октава (n = 0, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12) считаются консонансами, т.е. более благозвучными, а другие интервалы: малая и большая секунды, тритон, малая и большая септимы (n = 1, 2, 6, 10, 11) – диссонансами, т.е. менее благозвучными. Поворачивая построенную картину обертонов на окружности на угол $n\pi/6$, можно увидеть, что для n, соответствующим консонансам, повернутые обертоны согласуются с исходными лучшим образом, чем для n, соответствующим диссонансам.

Эффективное напряжение в сети переменного тока

В.ЛАНГЕ

Перспективность использования электрической энергии в технике и быту стала очевидной еще в начале XIX века, а в конце его началась настоящая война между сторонниками постоянного и переменного тока. В ней, однако, не было ни победителей, ни побежденных, так как для одних целей оказывается необходимым постоянный ток (например, при электролизе), в других случаях целесообразнее использовать переменный (в особенности, при передаче электроэнергии на большие расстояния). Уместно напомнить, что сейчас существуют простые установки, позволяющие легко преобразовывать один вид тока в другой.

В соответствии с названием, в сетях *постоянного* тока напряжение остается неизменным, а в сетях *переменного* тока оно со временем меняется. Обычно изменение напряжения происходит по синусоидальному закону $U = U_0 \sin \omega t$, где ω – циклическая частота, связанная с периодом T соотношением $\omega = 2\pi/T$, а U_0 – амплитудное значение напряжения. Графически характер изменения напряжения со временем показан на рисунке 1,*а*.

Предположим, что необходимо рас-

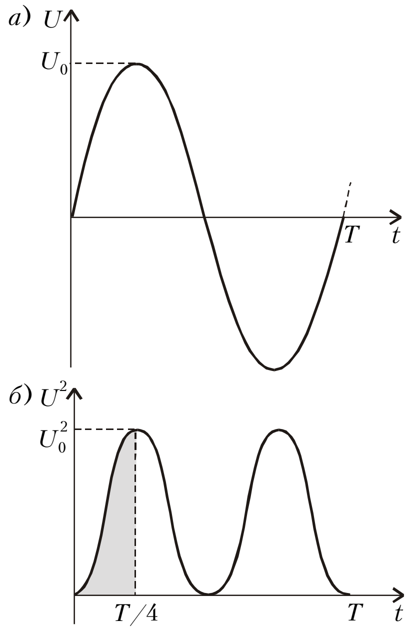

Рис. 1

считать мощность P, которую будет потреблять из сети переменного тока с амплитудным напряжением U_0 электрическая печь, имеющая сопротивление R. Как известно, такие расчеты выполняются с помощью закона Джоуля–Ленца:

$$P = I^2 R,$$

или в нашем случае

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

Однако в рассматриваемой цепи напряжение меняется и по знаку, и по величине. Как учесть эти два обстоятельства?

Начнем с ответа на более простой первый вопрос. В законе Джоуля–Ленца фигурирует квадрат напряжения, а поскольку $(+U)^2 = (-U)^2$, тепловыделение не зависит от знака разности потенциалов (или, что то же, от направления тока). Стало быть, и в сети переменного тока электрическая печь будет исправно выполнять свое назначение.

Попробуем теперь ответить на вопрос, какое напряжение надо подставить в формулу закона Джоуля–Ленца, чтобы получить правильное значение мощности в случае переменного тока. Для этого рассчитаем количество теплоты, выделяемое переменным током за время, равное периоду. И сделаем это следующим образом.

Поскольку теплоотдача определяется квадратом напряжения, легко понять, что тепловыделение имеет период $T/2$ (рис.1,*б*). Более того, достаточно рассмотреть интервал от 0 до $T/4$, так как выделенная на рисунке фигура, если учесть ее зеркальные отражения, повторяется именно с таким периодом. На этом интервале фаза колебаний меняется от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi/2$.

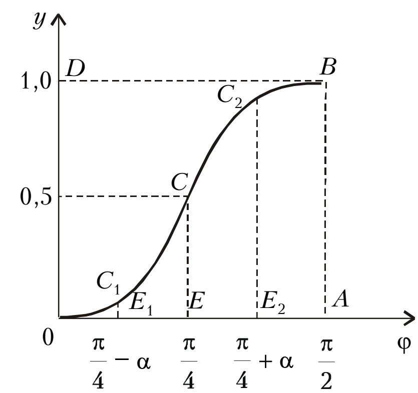

Рис. 2

Запишем выражение для мощности электропечи в некоторый момент времени t:

$$P(t) = \frac{U^2}{R} = \frac{U_0^2}{R}\sin^2 \omega t.$$

Ее среднее значение $\langle P \rangle$ в интервале времени от 0 до $T/4$ представим в виде

$$\langle P \rangle = \left\langle \frac{U_0^2}{R}\sin^2 \omega t \right\rangle = \frac{U_0^2}{R}\left\langle \sin^2 \omega t \right\rangle.$$

В угловых скобках остался зависящий от времени сомножитель, обозначаемый далее буквой y. Для расчета его среднего значения воспользуемся рисунком 2, отметив на оси абсцисс точки E_1, E и E_2, соответствующие фазам $\pi/4 - \alpha$, $\pi/4$ и $\pi/4 + \alpha$, где α – произвольный угол, удовлетворяющий условию $0 < \alpha < \pi/4$. Ясно, что

$$E_1C_1 = \sin^2(\pi/4 - \alpha) =$$
$$= \cos^2(\pi/2 - (\pi/4 - \alpha)) =$$
$$= \cos^2(\pi/4 + \alpha) = 1 - \sin^2(\pi/4 + \alpha) =$$
$$= 1 - C_2E_2.$$

Таким образом, кривая $0C_1CC_2B$ делит прямоугольник $0DBA$ на две равные части, каждая площадью

$$\frac{A0 \cdot 0D}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Чтобы найти среднее значение $\sin^2 \omega t$ за время изменения фазы от 0 до $\pi/2$, нужно площадь криволинейной фигуры $0CBA$ разделить на ее основание:

$$\left\langle \sin^2 \omega t \right\rangle = \frac{\pi/4}{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

После этого находим среднее значение мощности за время от $t_1 = 0$ до $t_2 = T/4$:

$$\langle P \rangle = \frac{U_0^2}{R}\left\langle \sin^2 \omega t \right\rangle = \frac{U_0^2}{2R}.$$

Поскольку такой же результат можно получить для каждого из последующих интервалов длительностью $T/4$, правая часть формулы дает мощность плитки сопротивлением R, включенной в сеть переменного тока с амплитудным значением напряжения U_0.

Пусть эта же плитка включена в сеть постоянного тока с таким напряжением $U_{эф}$, что ее мощность осталась прежней. Тогда, приравнивая мощность плитки в сети постоянного тока

$$P = \frac{U_{эф}^2}{R}$$

правой части предыдущего выражения, после несложного преобразования получим

$$U_{эф} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Напряжение в сети постоянного тока, где плитка дает такой же тепловой эффект, как и в сети переменного тока с амплитудным значением напряжения, в $\sqrt{2}$ бóльшим, называется эффективным (или действующим) напряжением в сети переменного тока.

В обычной городской сети амплитудное напряжение составляет приблизительно 310 В. Тогда для эффективного напряжения получается хорошо знакомое число 220 В.

Заметим, что аналогичное соотношение связывает эффективное и амплитудное значения и для силы тока в сети переменного тока.